1

Diese Aufgabe war tatsächlich unfair und wurde eigentlich hauptsächlich gestellt, um herauszufinden, wie viele Mathematikstudenten es im BisaBoard gibt (es waren tatsächlich mit über einer handvoll Rückmeldungen recht viele, wenn man von einer deutlich höheren Dunkelziffer ausgeht). Die Lösung selbst ist nicht sonderlich schwer zu finden, wennn man sich denn mit Galoistheorie auskennt:

40126 besitzt die Primfaktoren 2 und 20063, weshalb wir die gegebene Erweiterung auch als das Kompositum der Erweiterungen $M = \mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ und $L = M(\sqrt{20063})/M$ auffassen können. Diese beiden Erweiterungen sind jeweils endlich, separabel und normal (mit den trivialen Minimalpolynomen $X^2 - 2$ und $X^2 - 20063$), sodass die Galoisgruppe nach dem Hauptsatz der Galoistheorie das Kompositum der Galoisgruppen der beiden Teilerweiterungen ist. Wir erhalten somit eine zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorphe Galoisgruppe, genauer gesagt mit folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 :& \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}, \sqrt{20063} \mapsto \sqrt{20063} \\
\sigma_2 :& \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}, \sqrt{20063} \mapsto \sqrt{20063} \\
\sigma_3 :& \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}, \sqrt{20063} \mapsto -\sqrt{20063} \\
\sigma_4 :& \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}, \sqrt{20063} \mapsto -\sqrt{20063}
\end{aligned}$$

2

Hier hätte ich wohl am besten die gefragte physikalische Formel vorgeben sollen, da man, wie mich freundlicherweise Monsieur Cornebre hingewiesen hat, bei der Anwendung der Navier-Stokes-Gleichungen beispielsweise Reibung außer Betracht lässt. Beschränkt man sich aber auf die einfachste Modellierung, so erhalten wir als Formel für die enthaltene Energie

$$\int \rho \frac{v(x)^2}{2} dx,$$

wobei die Integralgrenzen durch den Zylinder gegeben werden. Das Vektorfeld selbst war so konstruiert, dass die ungerichtete Windgeschwindigkeit in jedem Punkt (mit Ausnahme der Punkte in der Mitte, die man aber, da es sich um eine Nullmenge (mathematisch für: zu klein, um im Verhältnis irgendwie wichtig zu sein) handelt, vernachlässigen kann) genau 100 m/s beträgt, wie man mittels des Satzes von Pythagoras recht direkt sieht. Das Integral, welches auch ohne

Kenntnis des Prinzips von Fubini intuitiv lösbar ist, ergibt demzufolge

$$2m \cdot (1m)^2 \cdot \pi \cdot 1,2\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{(100m/s)^2}{2} = 12000\pi\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

oder ca 37,7 Kilojoule. Das entspricht etwa der Energie, die benötigt wird, um eine 38 kg schwere Person 100 Meter hoch zu heben - wenn man den Beutel des Trainers einberechnet, den Dusk und ich auf etwa 350 kg schätzen, kommen wir so auf eine angenehme Reisehöhe von 10 Metern.

3

Obwohl diese Aufgabe zunächst die eingängigste ist, handelt es sich bei ihr meines Erachtens um die schwerste: Versuche, alle Möglichkeiten, bei denen die gesuchte Sequenz wenigstens einmal vorkommt, zu berechnen, enden oft damit, dass man Probleme in den Fällen bekommt, in denen die Squenz mehr als einmal vorkommt, da man diese eventuell doppelt zählt. Die Möglichkeit, einfach alle Kombinationen durch ein Computerprogramm überprüfen zu lassen, besteht zwar, ist aber äußerst ineffizient und führt bei einer größeren Anzahl an insgesamt ausgebreiteten Pokébällen zu äußerst langen Rechenzeiten.

Wir überlegen uns stattdessen einen alternativen, rekursiven Berechnungsansatz, für den wir $f(n)$ als die Anzahl der Kombinationen von n Pokébällen definieren, die die gewünschte Sequenz nicht enthalten. Dabei sind die folgenden Fälle sofort ersichtlich:

$$\begin{aligned} &f(1) = 3 \\ &f(2) = 9 \\ &f(3) = 27 - 1 = 26 \end{aligned}$$

Weiterhin definieren wir $f(0) = 1$, was auch logisch betrachtet Sinn ergibt: Wenn wir keine Pokébälle vorliegen haben und bei diesen null Pokébällen die Sequenz Bisasam - Glumanda - Schiggy vermeiden wollen, dann gibt es genau eine Möglichkeit, nämlich einfach keinen Pokéball auszuwählen (das ganze ist beispielsweise analog zur Potenzmenge der leeren Menge zu sehen). Wir betrachten nun rekursiv (also in Abhängigkeit von vorherigen Werten von f) $f(n)$, indem wir die n Pokébälle in zwei möglichst gleichlange Ketten aufteilen:

o o o o o | o o o o

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass n grade ist (andernfalls muss entsprechend einmal auf- und einmal abgerundet werden). Dann ist

$$f(n) = f(\frac{n}{2}) \cdot f(\frac{n}{2}) - f(\frac{n}{2} - 2) \cdot f(\frac{n}{2} - 1) - f(\frac{n}{2} - 1) \cdot f(\frac{n}{2} - 2),$$

denn alle Möglichkeiten, die Sequenz nicht in der großen Kette zu haben, berechnen sich aus den Möglichkeiten, die Sequenz nicht in der linken Teilkette zu haben kombiniert mit den Möglichkeiten, die Sequenz nicht in der rechten Teilkette zu haben. Davon müssen wir aber noch die Fälle abziehen, in denen die Sequenz auf der Trennstelle zwischen den beiden Abschnitten liegt, beispielsweise so:

o o o o b | g s o o

Dafür wählen wir einmal Bisasam fix als letztes Pokémon der linken Teilkette und berechnen alle Möglichkeiten, bei denen die Sequenz weiterhin nicht in dem Rest der linken Teilkette auftritt (also $f(\frac{n}{2} - 1)$) und multiplizieren das mit den Möglichkeiten, die wir haben, wenn wir Glumanda und Schiggy als die ersten beiden Pokémon der rechten Teilkette festlegen (also $f(\frac{n}{2} - 2)$). Analog verfahren wir mit dem anderen Fall, in dem Bisasam und Glumanda am Ende der linken Teilkette auftreten und Schiggy das erste Pokémon der rechten Teilkette darstellt. Damit haben wir alle Fälle, in denen die Sequenz vorkommmen könnte, ausgeschlossen und können mit dieser Formel aus den zu Beginn ermittelten Werten für $f(0), f(1), f(2)$ und $f(3)$ alle weiteren berechnen. [1] Als Ergebnis erhalten wir letztendlich $f(9) = 14849$, was, dividiert durch die Anzahl aller Möglichkeiten (nämlich 3^9), eine Wahrscheinlichkeit von ca. 75,44% dafür ergibt, dass die gesuchte Sequenz kein einziges Mal vorkommt.

4

Um ein Polynom ohne Nullstellen zu konstruieren, bezeichnen wir zunächst die Elemente unseres endlichen Körpers mit y_1 bis y_n. Wir betrachten nun das Polynom

$$f(x) = 1 + \prod_{i=1}^{n} (x - y_i).$$

Dieses ist eindeutig nichtkonstant, da in ausmultiplizierter Form der Faktor vor dem größten Monom (also vor der größen Potenz von x), namentlich x^n, 1 (und damit nicht 0) ist. Zudem ergibt dieses Polynom für jedes einzelne Körperelement

[1] Dies geschieht mit einer Komplexität von $O(n)$, sofern man alle Zwischenergebnisse ordentlich zwischenspeichert und kann für $n = 9$ sogar per Hand ausgerechnet werden.

den Wert 1: Denn wenn wir ein beliebtiges y_i aus dem Körper einsetzen, wird der entsprechende Faktor $(x - y_i)$ im Produkt 0 und damit wird sogar das ganze Produkt gleich 0. In der Folge bleibt nurnoch die addierte 1 bestehen. Somit ist das Polynom für jedes Element des Körpers 1 und damit nicht 0, also Nullstellenfrei. Wir haben also für jeden beliebigen Körper eine Möglichkeit gefunden, um ein nichtkonstantes Polynom ohne Nullstellen zu konstruieren. Damit kann Porygon keinen Körper finden, der den Bedingungen von Team Rocket genügt.